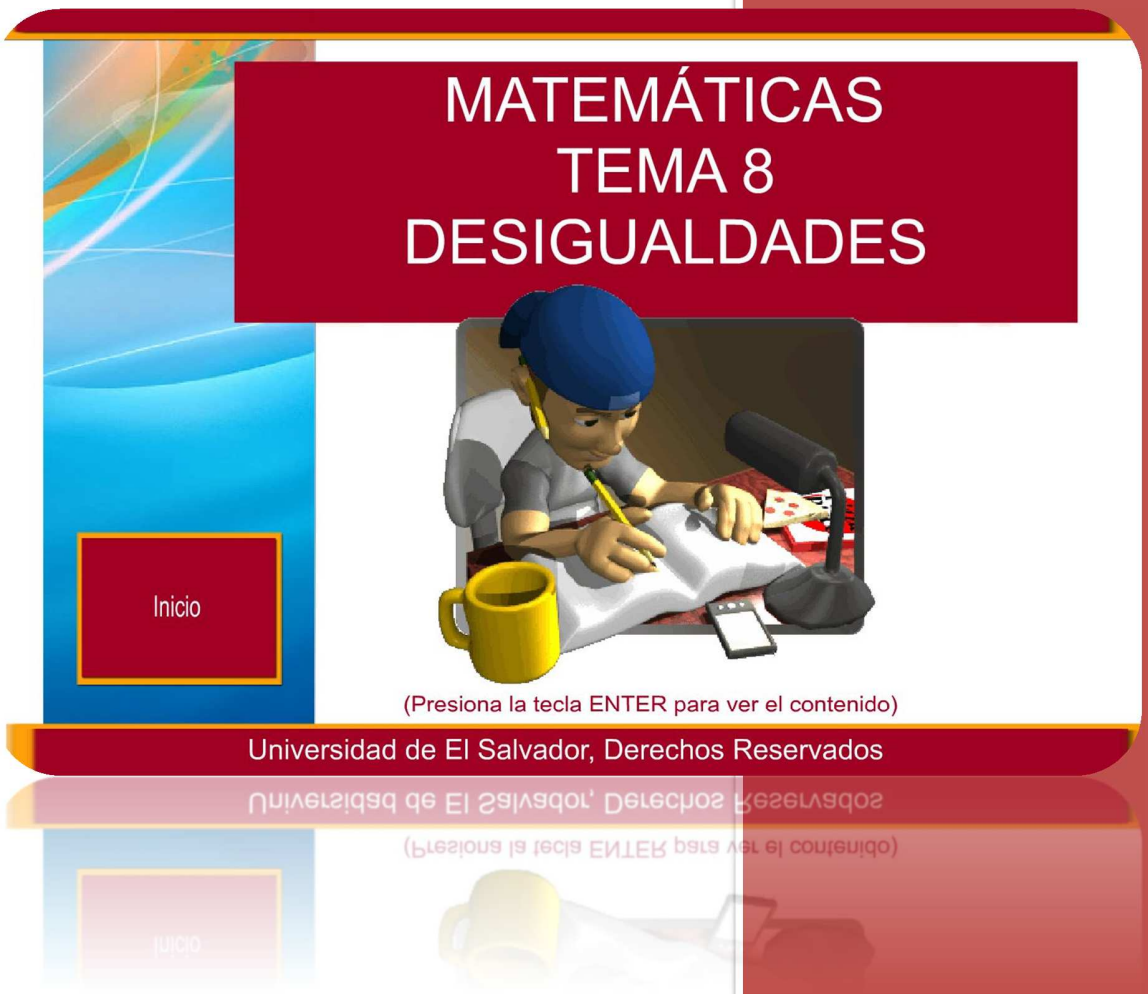
UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Refuerzo para Aspirantes a Nuevo Ingreso

MATEMÁTICA



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

DESIGUALDADES 1
PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES 1
INTERVALOS 2
RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES 5

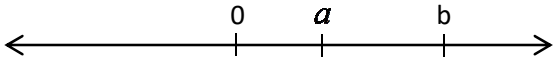
Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

DESIGUALDADES

Los números reales $(\mathbb{R})$ son ordenados, es decir: si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son números reales, entonces se dice que $\underline{a}$ es menor que $\underline{b}$ $(a<b)$ si $b-a$ es un real positivo.

$a<b \rightarrow b-a>0$ ó $b-a \in \mathbb{R}^+$

Geométricamente $\underline{a}$ es menor que $\underline{b}$ si $\underline{a}$ está a la izquierda de $\underline{b}$ en la recta real.



Diremos también que a es menor o igual a $\underline{b}$ y escribimos $a \leq b,$ si y solo si $a<b$ o $a=b,$ pero no ambos. Observe que la expresión $a<b$ se puede leer así: "$\underline{b}$ es mayor que $\underline{a}$" y que el "pico" del símbolo $(<)$ apunta hacia el número menor, por ejemplo:

1) 5>2, el cual se lee "5 es mayor que 2"
2) -4<0, el cual se lee "-4 es menor que 0"

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1) Si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$
2) Si $a<b$ y $c<d$ entonces $a+c<b+d$
3) Si $a<b,$ entonces $a+k<b+k$
4) Si $a<b$ y $k>0,$ entonces $ka<kb$
5) Si $a<b$ y $k<0,$ entonces $ka>kb$
6) $a<0$ y b>0, si $a<b,$ entonces $a^2<b^2$

Ejemplo. Demuestra la propiedad 5)

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

Desarrollo:

$a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$

$k < 0$, entonces $-k \in \mathbb{R}^+$

$(b-a)(-k) \in \mathbb{R}^+$, puesto que el producto de dos números positivos es otro número positivo.

$(b-a)(-k) > 0$

$ak - bk > 0$, entonces

$ak > bk$

"Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número negativo. El sentido de la desigualdad cambia". Por lo tanto no se puede multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por una expresión que contenga a la incógnita.

Ejemplo. Demuestre la propiedad 6)

Desarrollo:

$a > 0$ y b>0

$a < b \rightarrow a(a) < a(b) \Rightarrow a^2 < ab$ 1)

$a < b \rightarrow a(b) < a(b) \Rightarrow ab < b^2$ 2)

De 1) y 2)

$a^2 < ab$ y $ab < b^2$, entonces

$a^2 < b^2$

INTERVALOS

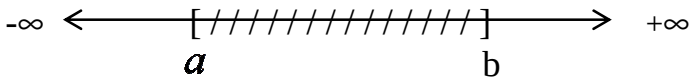
Los intervalos son subconjuntos de números reales.

Sean a, b números reales y $a < b$, denominaremos:

1) INTERVALO CERRADO de a y b, denotado $[a,b]$ al conjunto

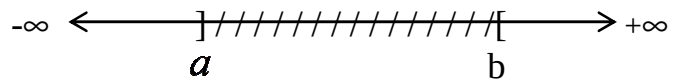
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados



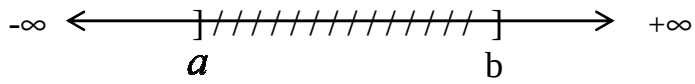
2) INTERVALO ABIERTO de a y b, denotado $]a,b[$ al conjunto

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



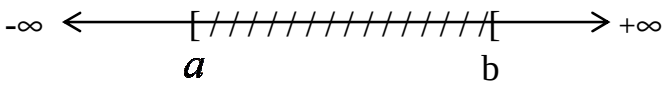
3) INTERVALO SEMI-ABIERTO por la izquierda denotado $]a,b]$ al conjunto

$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



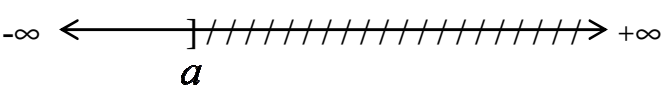
4) INTERVALO SEMI-ABIERTO por la derecha denotado $[a,b[$ al conjunto

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$



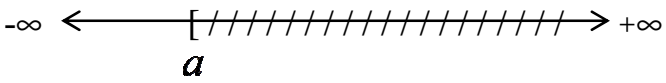
Los símbolos $+\infty$ (más infinito) y $-\infty$ (menos infinito) no son números reales y por lo tanto no obedecen la propiedad de dichos números. Usaremos estos símbolos para representar intervalos infinitos, así:

1) $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

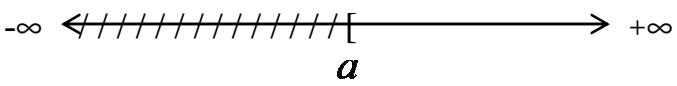


Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

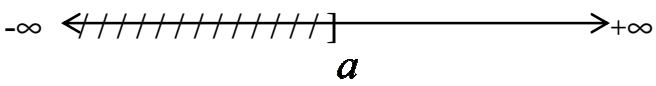
2) $[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}/x\geq a\}$



3) $]-\infty,a[=\{x\in\mathbb{R}/x<a\}$



4) $]-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}/x\leq a\}$



Por ejemplo, el intervalo $]-4,+\infty[$ contiene a todos los números reales que están a la derecha de -4 en la recta real, y el intervalo $]+\infty,+\infty[$, es la recta númerica o el conjunto de todos los números reales.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

Un número real *a* es una solución de una desigualdad en *x* si esta se satisface (es cierta) al sustituir el número *a*. El conjunto de todas las soluciones se "llama conjunto solución" de la desigualdad.

Ejemplo. Calcule el conjunto solución

1) $4x+5>2x+9$

Solución:

$4x+5>2x+9$

$4x-2x>-5+9$

$2x>2$

$x>4/2$

$x>2$

$S=]2,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}/x>2\}$

2) $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\leq\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$

Solución:

$\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\leq\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$

$\frac{3x-2}{6}\leq\frac{4x+3}{6}$

$3x-2\leq 6\left(\frac{4x+3}{6}\right)$

$3x-2\leq 4x+3$

$3x-4x\leq 2+3$

$-x\leq 5$

$x\geq 5$

$S=[-5,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -5\}$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

3) $-3 \leq 2-5x < 12$

Solución:

$-3 \leq 2-5x < 12$

$-3-2 \leq -5x < 12-2$

$-5 \leq -5x < 10$

$\frac{-5}{-5} \geq \frac{-5x}{-5} > \frac{10}{-5}$

$1 \geq x > -2$

$-2 < x \leq 1$

$S =]-2,1] = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 1\}$

4) $x^2 < x+6$

Solución:

Para resolver este tipo de desigualdad (no líneal), utilizaremos el siguiente procedimiento, el cual consideraremos el más sencillo:

a) Todos los términos del segundo miembro se trasladan al primer miembro de la desigualdad, así:

$x^2 < x+6$

$x^2 - x - 6 < 0$

b) El primer miembro de la desigualdad anterior se expresa en dos factores:

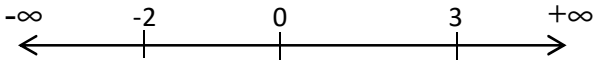
$(x-3)(x+2) < 0$

c) Se calculan los valores que vuelven cero a cada factor del primer miembro de la desigualdad anterior:

$x-3=0 \rightarrow x=3$

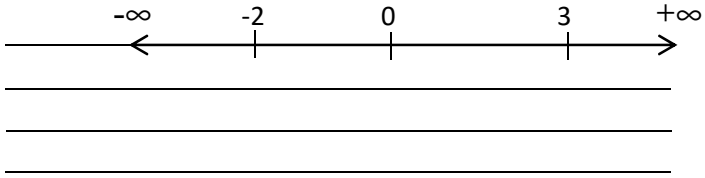
$x+2=0 \rightarrow x=-2$

d) Se dibuja la recta númerica (real) colocando en ella los valores anteriores:

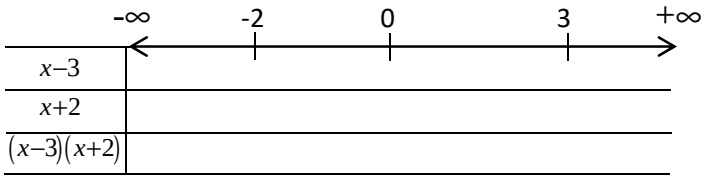


Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

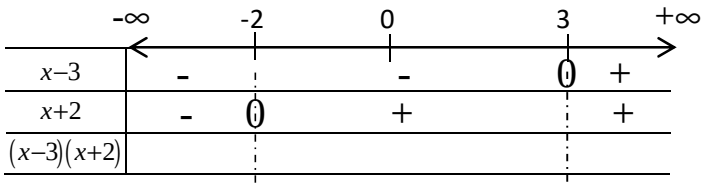
e) Debajo de la recta real del paso anterior se dibuja un renglón por cada factor del primer miembro de la desigualdad del paso b) más un renglón:



f) En la parte izquierda de los renglones se escriben los factores y el último renglon se escribe todo el primer miembro de la desigualdad del paso b), así:

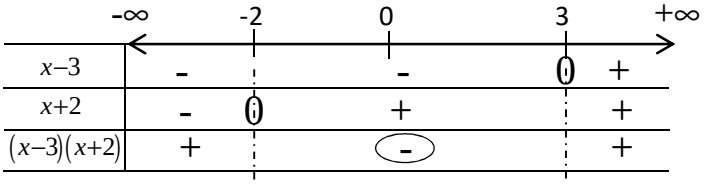


g) Se toma el primer factor $(x-3)$ y se observa que dicho factor es cero cuando x toma el valor de 3. Ficho factor es positivo si x toma valores mayores que 3 y es negativo si x toma valores menos que 3. Este proceso se repite con los otros factores. El cero y los signos + ó − se colocan en el cuadro así:



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

h) En el último reglón se colocan los signos que resultan de multiplicar (o dividir) los factores. Por ejemplo cuando *x* toma valores mayores que 3, $(x-3)$ es positivo y $(x+2)$ es también positivo por lo tanto $(x-3)(x+2)$ es positivo.



i) Se toma la desigualdad del paso b), $(x-3)(x+2)<0,$ y se observa (en el tercer renglón del paso anterior) que siempre que *x* tome valores mayores que -2 y menores que 3, dicha desigualdad se satisface.

j) Si *x* toma el valor de -2 y se sustituye en la desigualdad del paso b) se tiene:

$(x-3)(x+2)<0$

$(-2-3)(-2+2)<0$

$-5(0)<0$

$0<0$ falso

Por lo tanto -2 no pertenece al conjunto solución

Si *x* toma el valor de 3 y se sustituye en la desigualdad del paso b) se tiene:

$(x-3)(x+2)<0$

$(3-3)(3+2)<0$

$0(5)<0$

$0<0$ falso

Por lo tanto 3 no pertenece al conjunto solución

El conjunto solución es:

$S=]-2,3[$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

5) $\frac{x+1}{x+2} \leq 3$

Solución

$$\frac{x+1}{x+2} \leq 3$$

$$\frac{x+1}{x+2} - 3 \leq 0$$

$$\frac{x+1-3(x+2)}{x+2} \leq 0$$

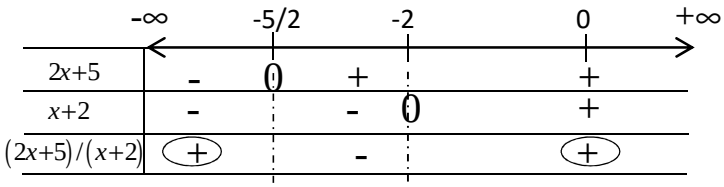
$$\frac{x+1-3x-6}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{-2x-5}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{2x+5}{x+2} \geq 0$$

$$2x+5=0 \rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$



$$S=]-\infty,-5/2[\cup]-2,+\infty[$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados